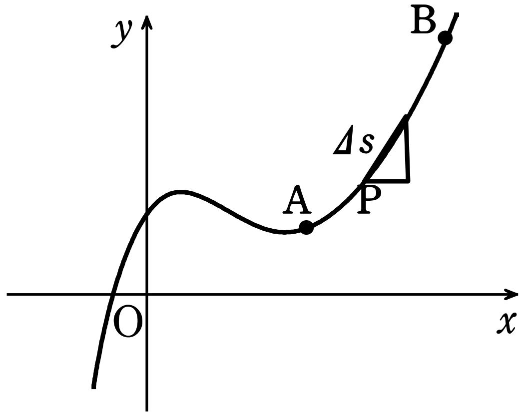
（３）曲線の長さ

①　媒介変数表示された曲線の長さ

曲線の方程式が媒介変数 t を用いて $x=f(t)$, $y=g(t)$（$\alpha \leqq t \leqq \beta$）と表され $f(t)$, $g(t)$ の導関数はともに連続であるとき　この曲線の長さLを定積分を用いて表してみよう。



$A(f(\alpha), g(\alpha))$, $B(f(\beta), g(\beta))$ とし　点Aから点P($f(t), g(t)$ ）までの曲線の長さを t の関数と考えて $s(t)$ で表す。また t の増分Δt に対して $s(t)$, $f(t)$, $g(t)$ の増分をそれぞれ Δs, Δx Δy とすると　$|\Delta t|$ が十分小さいとき

$$|\Delta s| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

点Pから曲線上をAからBに向かって動くとき　$s(t)$ は単調に増加する t の関数で Δt と Δs は同符号である。よって $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$

$\Delta t \to 0$ のとき　$\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$　従って　$s(t)$ は t の関数 $\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$ の不定積分の1つである。よって　定積分の定義から

$\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt = s(\beta) - s(\alpha)$　ここで　$s(\beta)=L$, $s(\alpha)=0$ であるから　曲線の長さL$= \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

②　曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ ($a \leqq x \leqq b$)において　t を媒介変数とする媒介変数表示すると

$x=t$, $y=f(t)$ ただし $a \leqq t \leqq b$　従って 長さ $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

ここで　$t=x$ と置換積分　$\dfrac{dx}{dt}=1$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = f'(x)$

ゆえに　曲線の長さL$= \displaystyle\int_a^b \sqrt{1^2 + \{f'(x)\}^2}\,dx$